Τοπολογία. 17-05-2018

1

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μ.χ. Αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X και $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, τότε το B είναι συνεκτικό (ειδικότερα $\bar{A}$ είναι συνεκτικό).

Απόδειξη

Έστω $f: B \to \{0,1\}$ συνεχής (και θα δείξουμε ότι η f δεν είναι επί).

Ο περιορισμός $f|A$ της f στο A είναι συνεχής και εφόσον το A είναι συνεκτικό η $f|A : A \to \{0,1\}$ δεν είναι επί.

Υποθέτοντας ότι $A \neq \emptyset$ επιλέγουμε $a \in A$.

Εφόσον η $f|A$ δεν είναι επί ισχύει $f(a) = f(x_0)$ $\forall a \in A$.

Για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \in \bar{A}$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ και εφόσον η f είναι συνεχής στο X προκύπτει $f(x_n) \to f(x)$

Εφόσον $f(x_n) = f(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (διότι $x_n \in A$) θα έχουμε $f(x) = f(x_0)$

Έτσι, $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in B$.

Άρα, η f δεν είναι επί του $\{0,1\}$.

Επομένως, το B είναι συνεκτικό.

Σημείωση: Το αντίστροφο δεν ισχύει

Ενδέχεται το $\bar{A}$ να είναι συνεκτικό και το A να μην είναι συνεκτικό.

π.χ. το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό

ενώ το $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό.

Πρόταση:
Συνεχής εικόνα συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικός χώρος.
Δηλαδή αν X συνεκτικός και $f: X \to Y$ συνεχής και επί
τότε και ο Y είναι συνεκτικός.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο Y δεν είναι συνεκτικός. Τότε θα υπάρχει $g: Y \to \{0,1\}$ συνεχής και επί.
Τότε η $g \circ f: X \to \{0,1\}$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) και επί (ως σύνθεση επί).
Άτοπο διότι ο X είναι συνεκτικός.
Επομένως, ο Y είναι συνεκτικός.

Ισοδύναμη διατύπωση:
Αν (X, ρ) μ.χ., A συνεκτικό υποσύνολο του X και $f: X \to Y$ συνεχής, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.

Πόρισμα: (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής).
Αν X συνεκτικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε το $f(X)$ είναι διάστημα.
(δηλ. αν $x, y \in X$ και $t \in \mathbb{R}$ με $f(x) < t < f(y)$ τότε υπάρχει $z \in X$, ώστε $f(z) = t$).

Απόδειξη:
Από την προηγούμενη πρόταση το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι διάστημα.

ρόταση:

Αν X, Y δυο μετρικοί χώροι και θεωρήσουμε τον $X \times Y$ με μετρική γινόμενο. Τότε ο $X \times Y$ είναι συνεκτικός αν και μόνο αν οι X, Y είναι συνεκτικοί.

Απόδειξη:

Ο $X \times Y$ είναι συνεκτικός.

Εφόσον οι προβολές $\Pi_1 : X \times Y \to X$, $\Pi_1(x,y) = x$, $\Pi_2 : X \times Y \to Y$, $\Pi_2(x,y) = y$

Είναι συνεχείς και επί

Συμπεραίνουμε ότι οι X, Y είναι συνεκτικοί.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι συνεκτικοί

Παρατηρούμε ότι για κάθε $a \in X$, το $\{a\} \times Y$ είναι συνεκτικό και για κάθε $\beta \in Y$, το $X \times \{\beta\}$ είναι συνεκτικό.

Αν $a \in X$, $\beta \in Y$, τότε $(X \times \{\beta\}) \cap (\{a\} \times Y) \neq \emptyset$.

Άρα, εφόσον $X \times \{\beta\}$, $\{a\} \times Y$ συνεκτικά, το $(X \times \{\beta\}) \cup (\{a\} \times Y)$ είναι συνεκτικό.

Θεωρούμε τυχαίο $a_0 \in X$.

Η οικογένεια των συνόλων $\left((\{a_0\} \times Y) \cup (X \times \{\beta\}) \right)_{\beta \in Y}$ αποτελείται από συνεκτικά σύνολα και η τομή τους είναι μη κενή, διότι όλα περιέχουν το $\{a_0\} \times Y$.

Άρα, η ένωσή τους είναι συνεκτικό σύνολο.

Όμως $X \times Y = \bigcup_{\beta \in Y} \left((\{a_0\} \times Y) \cup (X \times \{\beta\}) \right)$

Άρα, το $X \times Y$ είναι συνεκτικό.

Εφαρμογές:

· $[a,b]\times[\gamma,\delta]$ συνεκτικό.

· το $I_1\times I_2$, όταν I_1, I_2 δυο διαστήματα του $\mathbb{R}$, είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Συνεκτικές συνιστώσες:

Ορισμός: Έστω X μετρικός χώρος.
Ένα υποσύνολο A του X είναι μια συνεκτική συνιστώσα του X αν:

(i) Το A είναι μη κενό συνεκτικό

(ii) Αν $A\subseteq B\subseteq X$ και το B είναι συνεκτικό σύνολο τότε $A=B$ (Με άλλα λόγια το A είναι maximal (μεγιστικό ή μεγιστοτικό) συνεκτικό υποσύνολο του X.)

Πρόταση: Έστω X μετρικός χώρος.

(1) Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό υποσύνολο του X

(2) Αν A, B συνεκτικές συνιστώσες του X με $A\neq B$ τότε $A\cap B=\emptyset$.

(3) Για κάθε $x\in X$ υπάρχει μια (μοναδική σύμφωνα με το (2)) συνεκτική συνιστώσα A του X με $x\in A$.

(Αυτή θα συμβολίζεται $C(x)$ και καλείται συνεκτική συνιστώσα του x.)

Απόδειξη:

(1) Έστω A συνεκτική συνιστώσα του X.
Τότε το A είναι συνεκτικό σύνολο.
άρα $\overline{A}$ συνεκτικό.
Εφόσον $A\subseteq\overline{A}$ και το A είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X προκύπτει $A=\overline{A}$.
Άρα, το A είναι κλειστό.

(2) Έστω A, B δύο συνεκτικές συνιστώσες του X με $A \neq B$.

Τότε είτε υπάρχει $x \in A$ με $x \notin B$ είτε υπάρχει $x \in B$ με $x \notin A$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $A \cap B \neq \emptyset$.

Τότε το $A \cup B$ θα είναι συνεκτικό.

Τότε $B \subseteq A \cup B$ ενώ $B \neq A \cup B$ (διότι $x \in A \cup B$, $x \notin B$).

Άτοπο, διότι το B είναι maximal συνεκτικό σύνολο.

(3). Για $x \in X$ θέτουμε $C(x) = \bigcup \{A \subseteq X, A \text{ συνεκτικό}, x \in A\}$.

Εφόσον $\{x\}$ συνεκτικό συμπεραίνουμε ότι $C(x) \neq \emptyset$ (και μάλιστα $x \in C(x)$)

Το $C(x)$ είναι ένωση συνεκτικών συνόλων που όλα περιέχουν το x.

Άρα, το $C(x)$ είναι συνεκτικό.

Εξ' ορισμού, του $C(x)$ το $C(x)$ maximal συνεκτικό σύνολο.

Άρα, το $C(x)$ είναι συνεκτική συνιστώσα.

<u>Παρατήρηση</u>:

Από τα (2), (3) έχουμε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου αποτελούν διαμέριση του χώρου.

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος να οριστούν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου.
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής:

$x \sim y \iff$ Υπάρχει ένα συνεκτικό υποσύνολο S του X ώστε $x \in S$ και $y \in S$.
Προφανώς, η $\sim$ είναι αυτοπαθής (ανακλαστική)
$\sim$ είναι συμμετρική.

~ μεταβατική

Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε υπάρχει S_1 συνεκτικό υποσύνολο του X ώστε $x, y \in S_1$ και υπάρχει S_2 συνεκτικό υποσύνολο του X με $y, z \in S_2$

Τότε $y \in S_1 \cap S_2$ άρα $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Έτσι, το $S_1 \cap S_2$ είναι συνεκτικό και $x, z \in S_1 \cup S_2$

Άρα, $x \sim z$

Έτσι, η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ είναι ακριβώς οι συνεκτικές συνιστώσες του X.

<u>Παραδείγματα</u>:

α) Αν $X = [0,1] \cup (2,3]$ οι συνεκτικές συνιστώσες του X είναι τα σύνολα $[0,1]$, $(2,3]$.

β) Ο χώρος των ρητών $\mathbb{Q}$ (με τη συνήθη μετρική)

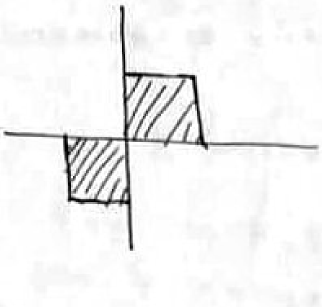
Οι συνιστώσες του $\mathbb{Q}$ είναι τα μονοσύνολα $\{x\}$ $x \in \mathbb{Q}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να δοθεί ένα παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A σε κατάλληλο μετρικό χώρο ώστε A συνεκτικό, A° μη συνεκτικό

<u>Απόδειξη</u>:

Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική



$$A = ([0,1] \times [0,1]) \cup ([-1,0] \times [-1,0])$$

Το $[0,1] \times [0,1]$ είναι συνεκτικό

Το $[-1,0] \times [-1,0]$ είναι συνεκτικό.

Το $(0,0)$ ανήκει και στα δύο παραπάνω σύνολα

Άρα, το A είναι συνεκτικό.

$$A^\circ = ((0,1) \times (0,1)) \cup ((-1,0) \times (-1,0))$$

Τα $(0,1) \times (0,1)$ και $(-1,0) \times (-1,0)$ είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}^2$.

Άρα, ανοικτά και στο A° (εφόσον το A° είναι ανοικτό).

Έτσι, το A° δεν είναι συνεκτικό.

2.

Έστω X μετρικός χώρος, S συνεκτικό υποσύνολο του X και A, B δυο μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X ώστε $X = A \cup B$. Τότε $S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$.

Απόδειξη:

$S = S \cap X = S \cap (A \cup B) = (S \cap A) \cup (S \cap B)$.

Τα $S \cap A$, $S \cap B$ είναι ανοικτά στο S (εφόσον A, B ανοικτά στο X)

$(S \cap A) \cap (S \cap B) = S \cap A \cap B = S \cap \emptyset = \emptyset$.

Εφόσον το S είναι συνεκτικό

$S \cap A = \emptyset$ ή $S \cap B = \emptyset$.

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$S \subseteq X \setminus A \qquad S \subseteq X \setminus B$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$S \subseteq B. \qquad S \subseteq A.$

3. Έστω X μ.χ., $(C_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X. και υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset \ \forall i \in I$.

Να δειχθεί ότι το $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη:

Για κάθε $i \in I$ το $C_i \cup C_{i_0}$ είναι συνεκτικό σύνολο (διότι C_i, C_{i_0} συνεκτικά και $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$).

Η οικογένεια $(C_i \cup C_{i_0})_{i \in I}$ αποτελείται από συνεκτικά υποσύνολα του X και $\bigcap_{i \in I} (C_i \cup C_{i_0}) \neq \emptyset$ (κάθε $x \in C_{i_0}$ ανήκει σε αυτή την τομή)

Άρα, το $\bigcap_{i \in I} (C_i \cup C_{i_0})$ είναι συνεκτικό.

Εφόσον $\bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (C_i \cup C_{i_0})$, το $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι συνεκτικό.

4. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και C συνεκτικό υποσύνολο του X με δυο τουλάχιστον στοιχεία.
Τότε το C είναι υπεραριθμήσιμο.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $a,\beta \in C$ με $a \neq \beta$.
Ορίζουμε $f: C \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x,a)$

Τότε η f είναι συνεχής (ξέρουμε γενικότερα ότι η $g: X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \rho(x,a)$ είναι συνεχής και $f = g|_C$)

Εφόσον f συνεχής και C συνεκτικό, το $f(C)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα είναι διάστημα.
Εφόσον $f(a) = 0$, θέτοντας $\lambda = \rho(\beta,a) > 0$ ~~&~~ $\lambda = f(\beta)$.
Εφόσον $0, \lambda \in f(C)$ άρα $[0,\lambda] \subseteq f(C)$
Αν το C ήταν αριθμήσιμο τότε το $f(C)$ θα ήταν αριθμήσιμο άρα $[0,\lambda]$ αριθμήσιμο άτοπο.

Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο.